

теорема 6

Если y_1 — нест. реш. ур-е

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \quad \text{то} \quad y_{00}$$

$$y_{00} = C_1 y_1 + C_2 y_2 \int \frac{e^{-\int a_1(x) dx}}{y_1^2} dx \quad (5)$$

Доп-во:

y_1, y_2 — л.н.с. реш. ур-е $\Rightarrow$

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{то} \quad e^{-\int a_1(x) dx}$$

$$y_1 y_2' - y_1' y_2 = \frac{C e^{-\int a_1(x) dx}}{y_1^2}$$

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{C e^{-\int a_1(x) dx}}{y_1^3}$$

$$\frac{y_2}{y_1} = C \int \frac{e^{-\int a_1(x) dx}}{y_1^3} dx + C_2$$

y_2 — л.н.с. реш. ур-е
 $C=1, C_2=0$

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int a_1(x) dx}}{y_1^3} dx$$

Доказано!!!

Замечание 7.6. справедливы и для ур. Ланге

§10. ЛОДУ n -ого порядка с пос-ми коэф-ми

$$n=2$$

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \quad (1)$$

$a_1, a_2 = \text{const}$

$y = e^{kx}$

$$y' = k e^{kx}$$

$$y'' = k^2 e^{kx}$$

$$k^2 e^{kx} + a_1 k e^{kx} + a_2 e^{kx} = 0 \quad k = \text{const}$$

$$k^2 + a_1 k + a_2 = 0 \quad (2)$$

$\Delta = a_1^2 - 4a_2 > 0$ $k_1 \neq k_2 \in \mathbb{R}$

$\Delta = 0$ $k_1 = k_2 = k \in \mathbb{R}$

$\Delta < 0$ $k_1 = \alpha + \beta i \in \mathbb{C}$

$e^{kx} \neq 0$ — характерист. ур-е

$y_{\text{part}} = C y_1 + C_2 y_2$
 y_1, y_2 - lin. nezh. rezhn. pover.

1) $k_1 \neq k_2$
 $y_1 = e^{k_1 x} \quad y_2 = e^{k_2 x}$

$y_1 = \frac{e^{k_1 x}}{e^{k_2 x}} + C \quad y_{\text{part}} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$

2) $k_1 \neq k_2 = k$
 $y_1 = e^{kx}$

$C_1 = -(k_1 + k_2) = -2k$

3) $\rightarrow y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int a(x) dx}}{y_1^2} dx \oplus$

$\oplus e^{kx} \int \frac{e^{-\int -2k dx}}{e^{2kx}} = e^{kx} \int \frac{e^{2kx}}{e^{2kx}} dx = e^{kx} \cdot x$

y_1, y_2 lin. nezh. rezhn. pover.
 $y_{\text{part}} = C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx}$

3) $k_1 = d + i\pi$ $k_2 = d - i\pi$

$y_1 = e^{(d+i\pi)x} \oplus$

$y_2 = e^{(d-i\pi)x} = e^{dx} \cdot e^{-i\pi x} = e^{dx} (\cos \pi x - i \sin \pi x)$

$\oplus e \cdot e = e^{dx} (\cos \pi x + i \sin \pi x)$

iv
 $e = \cos y + i \sin y$
 комплексная
 функция

$y_1 = \frac{y_1 + y_2}{2} = e^{dx} \cos \pi x$

$y_2 = \frac{y_1 - y_2}{2i} = e^{dx} \sin \pi x$

$y_{\text{part}} = C_1 e^{dx} \cos \pi x + C_2 e^{dx} \sin \pi x$

Пример 2. $y'' + 4y' + 4y = 0$

$k^2 + 4k + 4 = 0$
 $(k+2)^2 = 0$
 $k_1 = k_2 = -2$

$y_1 = e^{-2x}$

$y_2 = e^{-2x}$

$y_{\text{part}} = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x}$

Пример №2

$$\begin{aligned} y'' + 9y &= 0 \\ k^2 + 9 &= 0 \\ k^2 &= -9 = (3i)^2 \end{aligned}$$

$$k_{1,2} = \pm 3i$$

$$\alpha = 0 \quad \beta = 3$$

$$y_1 = e^{i3x} \cos 3x = \cos 3x$$

$$y_2 = e^{i3x} \sin 3x = \sin 3x$$

$$y_{\text{общ}} = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$$

Пример №3.

$$\begin{aligned} y'' + 3y' &= 0 \\ k^2 + 3k &= 0 \\ k(k+3) &= 0 \\ k_1 &= 0 \quad k_2 = -3 \end{aligned}$$

$$y_1 = e^{0x} = 1$$

$$y_2 = e^{-3x}$$

$$y_{\text{общ}} = C_1 \cdot 1 + C_2 e^{-3x}$$

Линейное одно-е ДУ n -го порядка с поств. коэффициентами.

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0 \quad (1)$$

Алгоритм решения ур-я (1).

1) состав. соотв. хар-е ур-я.

$$k^n + a_{n-1}k^{n-1} + \dots + a_1k + a_0 \neq 0 \quad (2) \quad (\text{аналог. ур-е по степеням})$$

2) найти все n корней ур-я (2)

3) пообр. с корнями составить групп. обобщ. реш.

$y_1, y_2, \dots, y_n$

а) Если $k_1 \neq k_2 \neq \dots \neq k_n \in \mathbb{R} \Rightarrow$
 $y_1 = e^{k_1 x}, y_2 = e^{k_2 x}, \dots, y_n = e^{k_n x}$

б) Если m -одинак. действ. корн. $k = k_1 = k_2 = \dots = k_m$
 $(m \leq n)$ k корень кратности m , то
 $y_1 = e^{kx}, y_2 = xe^{kx}, y_3 = x^2 e^{kx}, \dots, y_m = x^{m-1} e^{kx}$

1) Если $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i \Rightarrow$
 $y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$

2) Если $k = \alpha \pm \beta i$ кратным m , то
 $\Rightarrow$ $2m$ линейно независимых решений
 $y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x$
 $y_2 = x e^{\alpha x} \cos \beta x$
 $y_3 = x^2 e^{\alpha x} \cos \beta x$
 $\dots$
 $y_m = x^{m-1} e^{\alpha x} \cos \beta x$
 $y_{m+1} = e^{\alpha x} \sin \beta x$
 $y_{m+2} = x e^{\alpha x} \sin \beta x$
 $y_{m+3} = x^2 e^{\alpha x} \sin \beta x$
 $\dots$
 $y_{2m} = x^{m-1} e^{\alpha x} \sin \beta x$

4) $y_{\text{об}} = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$

Примеры:
 №1

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$$

$$k^3 - 3k^2 + 3k - 1 = 0$$

$$(k-1)^3 = 0$$

$$k_1 = k_2 = k_3 = 1$$

1 - корни кратности 3.

$$y_1 = e^x$$

$$y_2 = x e^x$$

$$y_3 = x^2 e^x$$

$$y_{\text{об}} = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 x^2 e^x$$

№2.

$$y'' + 6y' + 9y = 0$$

$$k^2 + 6k + 9 = 0$$

$$k^2(k^2 + 6k + 9) = 0$$

$$k^2(k+3)^2 = 0$$

$$k^2 = 0 \quad k^2 + 3 = 0$$

$$k_{1,2} = 0 \quad k^2 = -3 \Rightarrow 3i, -3i$$

0 - корни

кратности 2

$$y_1 = e^{0x} = 1$$

$$y_2 = x e^{0x} = x$$

$k = \pm \sqrt{3}i$ кратности 2
 $(\alpha = 0, \beta = \sqrt{3})$

$$y_3 = e^{0x} \cos \sqrt{3}x = \cos \sqrt{3}x$$

$$y_4 = x \cos \sqrt{3}x$$

$$y_5 = \sin \sqrt{3}x$$

$$y_6 = x \sin \sqrt{3}x$$

$$y_{\text{об}} = C_1 + C_2 x + C_3 \cos \sqrt{3}x + C_4 x \cos \sqrt{3}x + C_5 \sin \sqrt{3}x + C_6 x \sin \sqrt{3}x$$

§ 4.2 ЛНДУ по порядку

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_n y = f(x) \quad (1)$$

$a_1, a_2, \dots, a_n$ - констр-мол

Теорема (о структуре общего решения ЛНДУ)
 Общее решение ЛНДУ n-пор. (1)

$y_{\text{он}} = y_{\text{оо}} + y_{\text{чн}}$, где $y_{\text{оо}}$ - общее решение соотв. ОДУ,
 $y_{\text{чн}}$ - какое-либо частн. решение $y_{\text{он}}^{(1)} = y_{\text{оо}}^{(1)} + y_{\text{чн}}^{(1)}, y_{\text{он}}^{(2)} = y_{\text{оо}}^{(2)} + y_{\text{чн}}^{(2)}, \dots, y_{\text{он}}^{(n)} = y_{\text{оо}}^{(n)} + y_{\text{чн}}^{(n)}$

$$y_{\text{оо}}^{(n)} + y_{\text{чн}}^{(n)} + a_1 (y_{\text{оо}}^{(n-1)} + y_{\text{чн}}^{(n-1)}) + \dots + a_n (y_{\text{оо}} + y_{\text{чн}}) = f(x)$$

$$\underbrace{(y_{\text{оо}}^{(n)} + a_1 y_{\text{оо}}^{(n-1)} + \dots + a_n y_{\text{оо}})}_{0} + \underbrace{(y_{\text{чн}}^{(n)} + a_1 y_{\text{чн}}^{(n-1)} + \dots + a_n y_{\text{чн}})}_{f(x)} = f(x)$$

Теорема (о способе доказательства)
 Аналогично можно показать, что при любых констр. уел. - в можно подобрать констр. так, чтобы они выполнялись.

Теорема (принцип суперпозиций)
 Если $f(x) \in (1)$ $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_k(x)$, то общее решение (1) имеет вид
 $y_{\text{чн}} = y_{\text{чн}1} + y_{\text{чн}2} + \dots + y_{\text{чн}k}$, где
 $y_{\text{чн}i}$ - какое-либо частн. решение ур-е $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = f_i(x)$.

Метод вариации

Для простоты рассмотрим метод вариации для ур. 2-пор.

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x)$$

$$y_{\text{он}} = y_{\text{оо}} + y_{\text{чн}}$$

$$y_{\text{оо}} = C_1 y_1 + C_2 y_2 \quad y_1, y_2 - \text{частн. реш. л/н. контр. реш.}$$

$$y_{\text{чн}} = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2, \quad C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2 = ?$$

Найдем f и пров.

$$y_{\text{чн}}' = C_1'(x) y_1 + C_1(x) y_1' + C_2'(x) y_2 + C_2(x) y_2'$$

$$y_{ли}'' = c_1''(x)y_1' + c_1'y_1'' + c_1'(x)y_1' + c_1(x)y_1'' + c_2''(x)y_2' + c_2'y_2'' + c_2'(x)y_2' + c_2(x)y_2''$$

$$-c_1''$$

$$c_1'(x)y_1' + c_1'y_1'' = 0$$

$$y_{ли}'' = (c_1'(x)y_1' + c_1'y_1'')' = c_1'y_1' + c_1'y_1'' + c_1'y_1' + c_1y_1''$$

$$c_1'y_1' + c_1y_1'' + c_1'y_1' + c_1y_1'' + a_1(c_1y_1' + c_1y_1'') + a_1(c_1y_1' + c_1y_1'') =$$

$$c_1(y_1'' + a_1y_1' + a_1y_1'') + c_1(y_1'' + a_1y_1' + a_1y_1'') + c_1y_1' + c_1y_1' = f(x)$$

$$(*) \begin{cases} c_1'y_1' + c_1'y_2' = f(x) \\ c_1'y_1 + c_1'y_2 = 0 \end{cases}$$

система ур-й второго порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = W \neq 0 \quad \text{система имеет ед. решение}$$

$$c_1(x) = \int c_1'(x) dx$$

$$c_2(x) = \int c_2'(x) dx$$

1) Замечание: метод вариации конст. пост.х, само. ур-в-ов второго. или третьего порядка имеет. и с перем. коэф-тами, если удалось найти общее реш.

2) При решен. системы вариации ур-й доп. высшего порядка, вон. линия. системы при решении сист. со (*).

$$\begin{cases} C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n = 0 \\ C_1 y_1' + C_2 y_2' + \dots + C_n y_n' = 0 \\ \vdots \\ C_1 y_1^{(n-1)} + C_2 y_2^{(n-1)} + \dots + C_n y_n^{(n-1)} = f(x) \end{cases}$$

$$y_n = C_1(x)y_1 + \dots + C_n(x)y_n.$$

Пример $y'' - 4y' + 5y = \frac{e^{2x}}{\cos x}$ 1 НРД 2 нр.

1) $y'' - 4y' + 5y = 0$ $k^2 - 4k + 5 = 0$ $\Delta = 16 - 20 = -4 = 4i^2$
 $k_{1,2} = \frac{4 \pm 2i}{2} = 2 \pm i$ $\alpha = 2, \beta = 1$

$$y_1 = e^{2x} \cos x \quad y_2 = e^{2x} \sin x$$

$$y_{го} = C_1 e^{2x} \cos x + C_2 e^{2x} \sin x$$

2) $y_n = C_1(x) e^{2x} \cos x + C_2(x) e^{2x} \sin x$

$$\begin{aligned} C_1' e^{2x} \cos x + C_2' e^{2x} \sin x &= 0 \\ C_1' (e^{2x} \cos x - e^{2x} \sin x) + C_2' (e^{2x} \sin x + e^{2x} \cos x) &= \frac{e^{2x}}{\cos x} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} C_1' \cos x + C_2' \sin x = 0 \\ C_1' (2 \cos x - \sin x) + C_2' (2 \sin x + \cos x) = \frac{1}{\cos x} \end{cases} \quad C_1' = -\frac{C_2' \sin x}{\cos x}$$

$$-\frac{C_2' \sin x (2 \cos x - \sin x)}{\cos x} + C_2' (2 \sin x + \cos x) = \frac{1}{\cos x}$$

$$-C_2' \sin x (2 \cos x - \sin x) + C_2' \cos x (2 \sin x + \cos x) = 1$$

$$C_2' (-2 \sin x \cos x + \sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x) = 1$$

$$C_2' = 1, \quad C_1' = -\frac{\sin x}{\cos x}$$

$$C_1(x) = \int -\frac{\sin x}{\cos x} dx = \int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = \ln |\cos x|$$

$$C_2(x) = \int dx = x$$

$$y_n = e^{2x} \cos x \cdot \ln |\cos x| + x e^{2x} \sin x$$

$$y_{го} = y_{го} + y_n = e^{2x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x) + e^{2x} (\cos x \ln |\cos x| + x \sin x)$$

Уравнение с прав. частью специальной.
полю бере

прав. часть спец бере

$$f(x) = e^{\alpha x} (P_n(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x)$$

н. реш. н. у с пр. частью спец бере
опр-со отделим.

$$y_{\text{н.р.}} = x^s e^{\alpha x} \left[(A_0 x^N + A_1 x^{N-1} + \dots + A_N) \cos \beta x + \right. \\ \left. + (B_0 x^N + B_1 x^{N-1} + \dots + B_N) \sin \beta x \right]$$

где $N = \max \{n, m\}$

$S = \begin{cases} 0 & \text{если } \alpha \pm \beta i \text{ не совпаи ни с оди корн. пер. ур-я} \\ 1 & \text{если } \alpha \pm \beta i \text{ совпаи с корн. пер. ур-я, кратности } k \end{cases}$

$A_0, A_1, \dots, A_N, B_0, B_1, \dots, B_N$ — неопределенные кон-ты, для них нужно подобрать это решение в исходн. ур-е и приравнять коэф-ты при одн-х фр-сах в лев. и прав. частях почт и

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = e^x$$

1) $k_{1,2,3} = 1$
 $y_{\text{ог.}} = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x$

2) $f(x) = e^x$ $\alpha = 1, \beta = 0$
 $n = 0 = N$

$$\alpha \pm \beta i = 1 \pm 0 \cdot i = 1$$

$$l = 3$$

$$y_{\text{н.р.}} = x^3 e^x \cdot A = A x^3 e^x$$

$$y'_{\text{н.р.}} = A(3x^2 e^x + x^3 e^x) = A(3x^2 + x^3) e^x$$

$$y''_{\text{н.р.}} = A(6x + 3x^2) e^x + (3x^2) e^x$$

$$A(6+18x+9x^2+x^3)e^x - 3A(6x+6x^2+x^3)e^x + 3A(3x^2+x^3)e^x - Ax^3e^x = 2x^3e^x$$

$$A(6+18x+9x^2+x^3-18x-18x^2-3x^3+3x^3-x^3)=2x^3$$

$$6A=1$$

$$A = \frac{1}{6}$$

$$y_{inh} = e^x(C_1 + C_2x + C_3x^2) + \frac{x^3e^x}{6}$$

homogeneous

$$y'' - 2y' = 2xe^{2x} = 2 \frac{e^{2x}}{2} + e^{-2x}$$

$$y'' - 2y' = \frac{e^{2x}}{f_2(x)} + \frac{e^{-2x}}{f_2(x)}$$

$$1) f_2 - 2f_2 = 0$$

$$k_1=0, k_2=2$$

$$y_{inh} = C_1 + C_2e^{2x}$$

$$d/f_2(x) = e^{2x}$$

$$d=2, p=0, n=N=0$$

$$\alpha \pm \beta i = 2 \text{ roots of } \lambda^2$$

$$y_{inh} = Ax e^{2x}$$

$$2) f_2(x) = e^{-2x}$$

$$d=-2, p=0, n=N=0$$

$$\alpha \pm \beta i = -2$$

$$s=0$$

$$y_{inh} = Be^{-2x}$$

$$y_{inh} = y_{inh1} + y_{inh2} = Ax e^{2x} + Be^{-2x} = \frac{8e^{2x}}{2} + \frac{e^{-2x}}{8}$$

$$y'_{inh} = A(e^{2x} + 2xe^{2x}) - 2Be^{-2x}$$

$$y''_{inh} = A(2e^{2x} + 2e^{2x} + 4xe^{2x}) + 4Be^{-2x}$$

$$A(4+4x)e^{2x} + 4Be^{-2x} - 2A(1+2x)e^{2x} - 4Be^{-2x} = e^{2x} + e^{-2x}$$

$$Ae^{2x}(4+4x-2-4x) + 8Be^{-2x} = e^{2x} + e^{-2x}$$

$$2Ae^{2x} + 8Be^{-2x} = e^{2x} + e^{-2x}$$

$$2A=1$$

$$8B=1$$

$$A = \frac{1}{2}$$

$$B = \frac{1}{8}$$

$$3) \quad y'' + 9y = \underbrace{18 \sin 3x}_{f_1(x)} + \underbrace{x^2}_{f_2(x)} + \underbrace{e^{3x}}_{f_3(x)}$$

$$k^2 + 9 = 0$$

$$k_{1,2} = \pm 3i$$

$$a) \quad f_1(x) = 18 \sin 3x + 0 \cos 3x$$

$$\alpha = 0, \beta = 0, m = n = 0 = N, \quad \alpha \pm \beta i = \pm 3i, S = 1$$

$$y_{\text{H.1}} = x(A \cos 3x + B \sin 3x)$$

$$f_2(x) = x^2$$

$$\alpha = \beta = 0, \quad n = N = 2, \quad \alpha \pm \beta i = 0$$

$$y_{\text{H.2}} = Cx^2 + Dx + F$$

$$f_3(x) = e^{3x}$$

$$\alpha = 3, \beta = 0, \quad N = 0, \quad S = 0$$

$$y_{\text{H.3}} = Me^{3x}$$